Liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$-representations and odd-th cyclic covers of genus one two-bridge knots

お茶の水女子大学 理学部数学科 4 年
坂本 穂波 (Honami Sakamoto) *

概要

p を素数とし, $\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環とする. 数論における Galois 表現の変形理論 (Hida–Mazur 理論) とその低次元位相幾何学における類似研究の文脈において, 剰余表現が可約であるような既約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現に特別な関心があった. 本講演で紹介する我々の今回の研究 [STU25a] は, Mazur の提案に従い, その「逆の方向へ進む」ことを目指す.

主結果は次のように述べられる. 「K を種数 1 の 2 橋結び目とする. 素数 p が結び目 K のある奇数次の巡回被覆の 1 次ホモロジー群の大きさを割るとき, その群 $\pi_1(S^3 - K)$ は liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ.」議論の過程で, ルジャンドル記号を使って素数 p があるルカス型数列を割るための条件も指摘する. また, liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現の存在についても論じる.

本講演の内容は, 丹下稜斗氏 (早稲田大学) と植木潤氏 (お茶の水女子大学) との共同研究に基づく.

1 導入

結び目と素数, 3 次元多様体と代数体の整数環の類似性は, Gauss の時代から重要な役割を果たしてきたと考えられている [Mor12, Mor24]. 特に, 最初に結び目の $\mathbb{Z}$ 被覆に対する Alexander–Fox 理論と代数体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大に対する岩澤理論の類似性, また結び目群の表現の変形理論と Galois 表現の変形理論 (Hida–Mazur 理論) の類似性が指摘されている.

p を素数とし, $\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環とする. 既存の研究において, 剰余表現が可約であるような既約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現に特別な関心がある [MTTU17, KMTT18, TTU22, TU24, BTTU23]. 我々の今回の研究では, Mazur の提案 [Maz11, Section 19] に従い, 「逆の方向へ進む」ことを目指す.

π を群とする. 関数 $\chi : \pi \to \mathbb{Z}_p$ が $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標であるとは, $\chi = \mathrm{tr}\,\rho$ となるような $\mathbb{Z}_p$ の拡大体上の SL_2 表現 ρ が存在することをいう. また, $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現 (resp. 指標) が ***liminal*** であるとは, $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現 (resp. 指標) が絶対既約であり, かつ, そのすべての開近傍は絶対既約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現 (resp. 指標) をもつことをいう.

我々の主結果は次のように述べられる.

定理 1.1. *K を S^3 上の種数 1 の 2 橋結び目とする. 素数 p が結び目 K のある奇数次の巡回被覆の 1 次ホモロジー群の大きさを割るとき, その群 $\pi_1(S^3 - K)$ は liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ.*

* sakamoto10ho73@gmail.com

このような変形可能な指標はアレクサンダー多項式の零点に対応するということが, Burde と de Rham の研究によって古典的に知られている [Bur67, dR67, HPSP01]. なので, 我々の研究の背景には深い文脈が横たわっていると考えられる. なお, Burde–de Rham の定理の p 進類似とその数論的な設定への応用も存在する [MTT24].

本稿では, まず基本的な用語の説明をした後, 段階的な結果と議論のポイントを列挙することで, 種結果の証明のあらすじを概観する. 議論の詳細・具体例・さらなる展望については, 論文 [STU25a], また日本語版要旨 [STU25b] を参照されたい.

謝辞. 第 21 回数学総合若手研究集会の世話人の方々に感謝します. また, 有用な助言をくださった指導教員の植木潤先生（お茶の水女子大学）に感謝します.

2 結び目

S^1 の 3 次元球面 S^3 への埋め込みの像 K を, 自己交差を許さない連続的変形で同一視したものを, **結び目**という. 結び目は, $\mathbb{R}^2$ への射影図によって与えることができる. **図** 2.1の 0_1(自明な結び目), 3_1(三葉結び目), 4_1(8 の字結び目) などが基本的な例である.

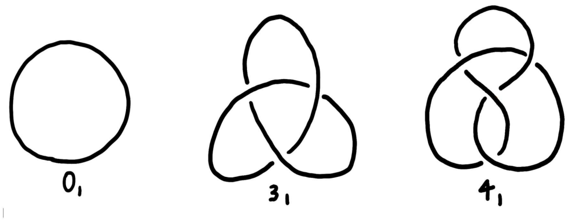

図 2.1

$S^3 - K$ 内に任意に基点 $*$ を取ったとき, 基本群 $\pi_1(S^3 - K, *)$ を K の**結び目群**とよぶ. 以下では, 基点は省略する.

任意の**種数 1 の 2 橋結び目**は, 各 $(0,0) \neq (k,l) \in \mathbb{Z}^2$ に対し, **図** 2.2によって定義される $J(2k, 2l)$ 型のダブルツイスト結び目として実現される. 基本的な参考文献は [Tra18] である.

特に, $J(2,0)$ は自明な結び目, $J(2,2)$ は三葉結び目 3_1, $J(2,-2)$ は 8 の字結び目 4_1 であることが知られている.

そのような結び目の群は次のような表示を持つ.

$$\pi := \pi_1(S^3 - J(2k, 2l)) = \langle a, b \mid w^l a = b w^l \rangle$$

ここで, a, b はメリディアンを表し, $w = (ba^{-1})^k (b^{-1}a)^k$ である.

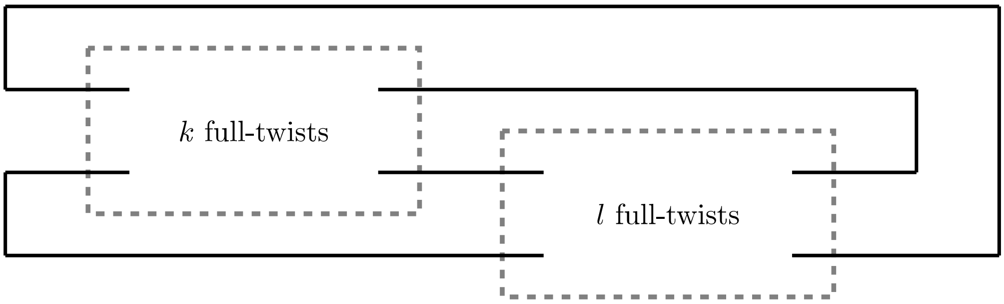

図 2.2

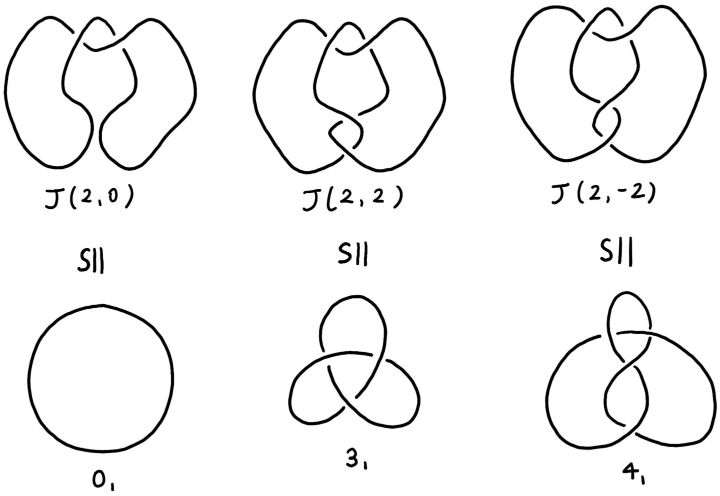

図 2.3

古典的な結び目不変量の一つにアレクサンダー多項式があり, 結び目を境界にもつ有向曲面 (ザイフェルト膜) を取るごとに決まるザイフェルト行列によって計算される. いま, ザイフェルト行列の 1 つは $V = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & l \end{pmatrix}$ であり, アレクサンダー多項式は

$$\Delta_{J(2k,2l)}(t) = \det\left(tV - V^{\perp}\right) = klt^2 + (1-2kl)t + kl$$

である.

各 $g \in \pi$ に対し, 写像 $\operatorname{tr} g\colon \operatorname{Hom}(\pi, \mathrm{SL}_2\mathbb{C}) \to \mathbb{C}; \rho \mapsto \operatorname{tr} \rho(g)$ を考える. そのとき, $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現の共役類は

$$x := \operatorname{tr} a, \quad y := \operatorname{tr} ab^{-1}$$

によってパラメーター付けられる. さらに, $z := \operatorname{tr} w$ とおく.

非可換な $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現の各共役類は, 次の式で定義される **Riley の普遍表現**によって代表される:

$$\rho^{\mathrm{R}}(a) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho^{\mathrm{R}}(b) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 2-y & s^{-1} \end{pmatrix}.$$

ここで, $x = s + s^{-1}$ であり, x, y は Riley 多項式の等式 $f_{k,l}(x, y) = \Phi_{k,l}(x, y - 2) = 0$ をみたす.

3　主定理の証明

3.1　2 つの曲線の交点

既約表現の共役類たちと, $f_{k,l}(x, y) = 0$ かつ $y - 2 \neq 0$ なる点たちの間には, 一対一対応が存在する. $y - 2 = 0$ の各点は可約表現の集合と可換表現の集合の組と対応する.

命題 3.1. $f_{k,l}(x, y) = 0$ と $y - 2 = 0$ の交点は $(x, y) = (\pm\sqrt{4 - \frac{1}{kl}}, 2)$ である.

証明. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し, n 次の第 2 種チェビシェフ多項式 $S_n(z) \in \mathbb{Z}[z]$ を

$$S_{n-1}(2\cos\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}, \theta \in \mathbb{R}, \sin\theta \neq 0$$

によって定めると, [Tra18, Subsection 2.2] により, 既約指標の多様体は

$$f_{k,l}(x, y) = S_l(z) - (1 + (-x^2 + y + 2)S_{k-1}(y)(S_k(y) - S_{k-1}(y))S_{l-1}(z).$$

によって与えられる. n 次の第 2 種チェビシェフ多項式の性質を用いることで, 定理の交点を求めることができる. □

3.2　$\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標

定理 3.2. $kl \neq 0$ と仮定する. このとき, $J(2k, 2l)$ の群が *a liminal* な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ必要十分条件は
i) $p = 2$ かつ $4k^2l^2 - kl \equiv 1 \bmod 8$, または
ii) $p \neq 2$, $p \nmid kl$, かつ $4k^2l^2 - kl$ の非平方部分 r に対し, ルジャンドル記号 $\left(\dfrac{r}{p}\right) = 1$.

ここに $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ に対し, $b^2 \mid a$ をみたす最大の整数を b とするとき, a/b^2 を a の**非平方部分**と呼ぶ. (この用語は別の概念に用いられる場合もあるので注意されたい.) また, $a \in \mathbb{Z}$ の p 上の**ルジャンドル記号** $(\frac{a}{p}) \in \{0, \pm 1\}$ は以下のように定義される. まず, $p \mid a$ のとき, $(\frac{a}{p}) = 0$ と置く. 次に, $p \nmid a$ と仮定する. もし $a \equiv x^2 \bmod p$ となる $x \in \mathbb{Z}$ が存在するなら, $(\frac{a}{p}) = 1$ と定める. そうでないとき, $(\frac{a}{p}) = -1$ と定める.

補題 3.3. $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ かつ $p^2 \nmid a$ とする. このとき, $\sqrt{a} \in \mathbb{Z}_p$ とであるための必要十分条件は.
i) $p = 2$ かつ $a \equiv 1 \bmod 8$, または
ii) $p \neq 2$, $(\frac{a}{p}) = 1$.

証明. ヘンゼルの補題 (cf.[Neu99, Chapter II (4.6)]) から導かれる. □

補題 3.4. $\pi_1(S^3 - J(2k, 2l))$ の liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標と, $\mathbb{Z}_p^2$ 上で $f_{k,l}(x, y) = 0$ と $y - 2 = 0$ の交点との間に 1 対 1 対応がある.

証明. **定理 3.1**より, $f_{k,l}(x,y)=0$ と $y-2=0$ は $\mathbb{Z}_p^2$ 内で交点をもつとき, $f_{k,l}(x,2)=(f_{k,l}(x,y) \bmod (y-2))$ は $\mathbb{Z}_p$ において単根 α をもち, ヘンゼルの補題により $(x,y)=(\alpha,2)$ の周りの陰関数 $x=x_f(y)\in\mathbb{Z}_p[\![y-2]\!]$ が得られることを用いる. □

定理 3.2 の証明. $f_{k,l}(x,y)=0$ と $y-2=0$ が $\mathbb{Z}_p^2$ に交点を持つための必要十分条件は $p\nmid kl$ かつ $\sqrt{4k^2l^2-kl}\in\mathbb{Z}_p$ であることなので, **補題** 3.3と**補題** 3.4から定理の主張が得られる. □

3.3 Lucas/Fibonacci 型数列

$m\in\mathbb{Z}$ とし, $t^2-t+m=(t-a)(t-b)$ と書くと, $a+b=1$, $ab=m$ が成り立つ. Lucas 型数列と Fibonacci 型数列をそれぞれ $L_n=a^n+b^n$, $F_n=\frac{a^n-b^n}{a-b}$ と定義する. すると, $L_0=2$, $L_1=1$, $L_2=1-2m$, $L_{n+2}=L_{n+1}-mL_n$, $F_0=0$, $F_1=1$, $F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}-mF_n$ となり, したがって $L_n,F_n\in\mathbb{Z}$ である.

すると,

$$L_n^2+(4m-1)F_n^2=4m^n \quad \cdots(\star)$$

が得られる.

ここで, p が L_{2n+1} を割り切るようなある $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ があると仮定する. そのとき, 漸化式により, $(4m-1)F_n^2\equiv(2m^n)^2m \bmod p$ が成り立つ. これは, $m(4m-1)$ が mod p で平方であることを表している. さらに, $p\nmid m(4m-1)$ が成り立つ. 一方, $p\mid 4m-1$ ならば, $(\star)$ より $p=2$ または $p\mid m$ となり, したがって矛盾する. よって, 次が得られる.

命題 3.5. 素数 p に対し, ある $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ があって p が L_{2n+1} を割り切るとき, ルジャンドル記号について $\left(\dfrac{4m^2-m}{p}\right)=1$ となる.

3.4 Fox–Weber の公式

S^3 内の結び目 K を考え, そのアレクサンダー多項式を $\Delta_K(t)$ で表す. このとき, Fox–Weber の公式 [Web79] により, 各 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し, K で分岐する $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 被覆 $M_n\to S^3$ は

$$r_n:=|H_1(M_n;\mathbb{Z})|=|\mathrm{Res}(t^n-1,\Delta_K(t))|$$

を満たす. ただし群 G が有限群のとき $|G|$ で G の位数 $\#G$ を表し, G が無限群のときは $|G|=0$ と定める. また, 多項式 $f(t),g(t)\in\mathbb{Z}[t]$ に対し, $\mathrm{Res}(f(t),g(t))\in\mathbb{Z}$ はそれらの終結式を表す. なお, K が種数 1 の 2 橋結び目であるときは, $H_1(M_n)$ の詳しい群構造は Fox らによって知られている [Fox60, Ily21]. まず, 次のように主張する.

定理 3.6. $\Delta_K(t)=mt^2+(1-2m)t+m$ で $m\in\mathbb{Z}$ であるとき, $p\mid r_n$ となるある奇数 n があるならば $\left(\dfrac{4m^2-m}{p}\right)=1$ である.

証明. n が奇数のとき, $L_n^2=(a^n+b^n)^2=-\mathrm{Res}(t^n-1,\Delta_K(t))=r_n$ が成り立ち, **定理 3.5**から結論が導かれる. □

定理 1.1の証明. $\Delta_{J(2k,2l)}(t) = klt^2 + (1-2kl)t + kl$ であるから, $m = kl$ を代入することで, **定理 3.2**と**定理 3.6**から得られる. $\square$

4 Liminal 表現の存在

いま ρ を $\mathbb{Z}_p$ の有限拡大上の表現とし, $\overline{\rho} := \rho \bmod p$ が絶対既約であり, $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\,\overline{\rho} \subset \mathbb{F}_p$ をみたすとする. このとき, 有限体の Brauer 群は自明であるから, Skolem–Noether の定理により, このような $\mathbb{F}_p$ 上のある表現 $\overline{\rho}'$ と共役である (cf.[Mar16, Subsection 3.5]). さらに, Nyssen の定理 [Nys96, Théorèm 1] により, この $\overline{\rho}'$ は $\mathbb{Z}_p$ 上の表現 ρ' であって $\mathrm{tr}\rho = \mathrm{tr}\rho'$ を満たすものへと持ち上がり, このような ρ' は共役を除き一意的である.

この議論がそのまま既約指標多様体 $X_{\mathrm{irr}}(S^3 - J(2k,2l)) = \{f_{f,l}(x,y) = 0\} \setminus \{y - 2 = 0\}$ であるザリスキー閉包上の表現に拡張できるかどうかが気になるところである. Nyssen の証明は, 絶対既約性が多元環準同型の全射性と同値であるという事実を用いているので, その結果は剰余可約表現には必ずしも拡張されない. さらに, [KMTT18, Subsection 2.3] に指摘されているように, 結び目群の表現の設定では, 随伴表現の 2 次ホモロジーが消えないという意味で, 変形問題は障害が生じる. 次の問題は繊細である.

問い 4.1. $\mathbb{Z}_p$ 上の liminal 表現が与えられたとき, liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現を見つけられるか?

少なくとも次が言える.

命題 4.2. **定理** 3.2の条件のもとで*, $p \neq 2$ かつ $\left(\frac{-kl}{p}\right) = 1$ であるとき, liminal* な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現が存在する*.*

証明. **補題** 3.4の $\boldsymbol{\rho}^R$ を考え, $s = \frac{x - \sqrt{x^2-4}}{2}$ に注意する. **命題** 3.1より, $\sqrt{x^2-4}\,|_{y=2} = \sqrt{\frac{-1}{kl}}$ が成り立つ. $\left(\frac{-kl}{p}\right) = 1$ のとき, $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{\frac{-1}{kl}} \in \mathbb{Z}_p$ であり, よって, $\boldsymbol{\rho}^R \bmod y-2$ は liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現である. $\square$

参考文献

[BTTU23] Léo Bénard, Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Multiplicity of non-acyclic* SL_2*-representations and L-functions of the twisted Whitehead links*, preprint. arXiv:2303.15941, 2023.

[Bur67] Gerhard Burde, *Darstellungen von Knotengruppen*, Math. Ann. **173** (1967), 24–33. MR 212787

[dR67] Georges de Rham, *Introduction aux polynômes d'un nœud*, Enseign. Math. (2) **13** (1967), 187–194. MR 240804

[Fox60] Ralph H. Fox, *The homology characters of the cyclic coverings of the knots of genus one*, Ann. of Math. (2) **71** (1960), 187–196. MR 119210

[HMP16] Michael Heusener, Vicente Muñoz, and Joan Porti, *The* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$*-character variety of the figure eight knot*, Illinois J. Math. **60** (2016), no. 1, 55–98. MR 3665172

[HP15] Michael Heusener and Joan Porti, *Representations of knot groups into* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ *and twisted Alexander polynomials*, Pacific J. Math. **277** (2015), no. 2, 313–354. MR 3402353

[HPSP01] Michael Heusener, Joan Porti, and Eva Suárez Peiró, *Deformations of reducible representations of 3-manifold groups into* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, J. Reine Angew. Math. **530** (2001), 191–227. MR 1807271

[Ily21] Mednykh Ilya, *Homology group of branched cyclic covering over a 2-bridge knot of genus two*, preprint. arXiv:2111.04292, November 2021.

[KMTT18] Takahiro Kitayama, Masanori Morishita, Ryoto Tange, and Yuji Terashima, *On certain L-functions for deformations of knot group representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), no. 5, 3171–3195. MR 3766846

[Lag85] J. C. Lagarias, *The set of primes dividing the Lucas numbers has density* $2/3$, Pacific J. Math. **118** (1985), no. 2, 449–461. MR 789184

[Mar16] Julien Marché, *Character varieties in* SL_2 *and Kauffman Skein algebras*, Topology, Geometry and Algebra of low-dimensional manifolds, RIMS Kôkyûroku, no. 1991, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 4 2916, pp. 27–42.

[Maz11] Barry Mazur, *How can we construct abelian Galois extensions of basic number fields?*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **48** (2011), no. 2, 155–209. MR 2774089

[Mor12] Masanori Morishita, *Knots and primes*, Universitext, Springer, London, 2012, An introduction to arithmetic topology. MR 2905431

[Mor24] ———, *Knots and primes*, Universitext, Springer Singapore, 2024, An introduction to arithmetic topology, 2nd edition.

[MTT24] Yasushi Mizusawa, Ryoto Tange, and Yuji Terashima, *On the Burde–de Rham theorem for finitely presented pro-p groups*, to appear in Int. Math. Res. Not. IMRN (2024), arXiv:2408.01270.

[MTTU17] Masanori Morishita, Yu Takakura, Yuji Terashima, and Jun Ueki, *On the universal deformations for* SL_2*-representations of knot groups*, Tohoku Math. J. (2) **69** (2017), no. 1, 67–84. MR 3640015

[Neu99] Jürgen Neukirch, *Algebraic number theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 322, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder. MR 1697859 (2000m:11104)

[Nys96] Louise Nyssen, *Pseudo-représentations*, Math. Ann. **306** (1996), no. 2, 257–283. MR 1411348 (98a:20013)

[STU25a] Honami Sakamoto, Ryoto Tange, and Jun Ueki, *Liminal* $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$*-representations and odd-th cyclic covers of genus one two-bridge knots*, preprint. arXiv:2501.00323, 2025.

[STU25b] ———, *Liminal* $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$*-representations and odd-th cyclic covers of genus one two-bridge knots –a précis in japanese–*, 研究集会「結び目の数理 VII」報告集, to be available at `https://taniyama.w.waseda.jp/mathsciknot2024/mathsciknot2024.html`, 2025.

[Tra18] Anh T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of genus one two-bridge knots*, Kodai Math. J. **41** (2018), no. 1, 86–97. MR 3777388

[TTU22] Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Non-acyclic* SL_2*-representations of twist knots,* -3*-Dehn surgeries, and* L*-functions*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2022), no. 15, 11690–11731. MR 4458562

[TU24] Ryoto Tange and Jun Ueki, *Twisted Iwasawa invariants of knots*, Math. Nachr. **297** (2024), no. 4, 1519–1534. MR 4734983

[Web79] Claude Weber, *Sur une formule de R. H. Fox concernant l'homologie des revêtements cycliques*, Enseign. Math. (2) **25** (1979), no. 3-4, 261–272 (1980). MR 570312 (81d:57011)